

## E 4

# Komplexe Widerstände

### 1. Aufgabenstellung

- 1.1 Bestimmen Sie 2 unbekannte Induktivitäten durch Strom-Spannungsmessung einzeln, in Reihen- und Parallelschaltung bei einer Frequenz.
- 1.2 Führen Sie die gleichen Messungen mit der Brückenschaltung durch.
- 1.3 Messen Sie die gleichen Anordnungen mit einer RLC-Messbrücke.
- 1.4 Stellen Sie die Ergebnisse in Tabellenform mit Fehler zusammen und vergleichen Sie die Verfahren.
- 1.5 Führen Sie die gleichen Messungen mit 2 unbekanntem Kapazitäten durch.

Anmerkung: Die Frequenz kann zwischen 45 Hz und 450 Hz gewählt werden.  
(Frequenzmessbereich des Messgerätes beachten!)

### 2. Theoretische Grundlagen

Stichworte zur Vorbereitung :

magnetisches Feld, elektrisches Feld, Induktivität, Kapazität, Induktionsgesetz, komplexer Widerstand, Zeigerdiagramm, Effektivwert, Brückenschaltung

Literatur :

W. Walcher                      Praktikum der Physik, 6. Auflage, Kap. 5.1.5,  
  B. G. Teubner Verlag 1989

W. Ilberg, M. Krötzsch      Physikalisches Praktikum für Anfänger,  
  9. Auflage, Kap. E 5.0, 5.1, 5.2,  
  B. G. Teubner Verlag 1992

H. Elschner,  
A. Möschwitzer                Einführung in die Elektrotechnik-Elektronik,  
  Kap. 3.4.2., 3.5,  
  Verlag Technik Berlin, 1987

Induktivitäten und Kapazitäten stellen in Wechselstromkreisen frequenzabhängige Widerstände dar und verursachen Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung. Zur Berechnung des Wechselstromwiderstandes wird häufig die komplexe Darstellung benutzt. Dabei werden die zur Beschreibung von Wechselspannungen und Wechselströmen verwendeten Winkelfunktionen  $\cos \omega t$  und  $\sin \omega t$  durch die komplexe e-Funktion

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

ersetzt. Die dadurch mögliche Darstellung von Strömen, Spannungen und Widerständen in der komplexen Ebene wird als Zeigerdiagramm bezeichnet. Im folgenden sind  $i(t)$  und  $u(t)$  beliebige Zeitfunktionen.  $\underline{I}$ ,  $\underline{U}$  und  $\underline{Z}$  sind die entsprechenden komplexen Größen.

## 2.1 Die Induktivität

Der Wechselstromwiderstand einer idealen Induktivität  $L$  läßt sich aus der Strom-Spannungs-Beziehung für die Induktivität

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

(  $L \frac{di(t)}{dt}$  ist der Spannungsabfall an der Induktivität und gleich der negativen induzierten Spannung!) berechnen.

Mit dem fließenden Strom

$$\underline{I} = I_0 e^{j\omega t} \quad (2)$$

und Gl. (1) folgt

$$\begin{aligned} \underline{U} &= j \omega L I_0 e^{j\omega t} \\ \underline{U} &= j \omega L \underline{I} \end{aligned} \quad (3)$$

und damit der komplexe Widerstand

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j \omega L = |\underline{Z}| e^{j\varphi_L} \quad (4)$$

$|\underline{Z}|$  ist der Quotient der Spitzen- bzw. der Effektivwerte von Spannung und Strom. Die Phasenlage wird durch  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  bestimmt.

Die Spannung eilt dem Strom um  $\frac{\pi}{2}$  voraus. Die Einheit von  $L$  ist Henry (H).

$$[L] = \frac{Vs}{A} = H \text{ (Henry)}$$

Eine ideale Induktivität  $L$  läßt sich nur näherungsweise verwirklichen. Eine reale Induktivität (Spule) muß deshalb im Ersatzschaltbild durch einen OHM'schen Widerstand in Reihe ergänzt werden. Er enthält den Widerstand des Drahtes sowie Wirbelstrom- und Hystereseverluste, wenn sich das Magnetfeld nicht in Luft, sondern in einer anderen Substanz ausbreitet.

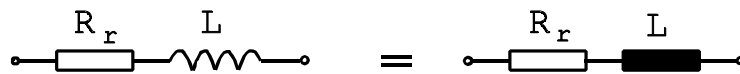


Abb. 1 : Ersatzschaltbild einer Induktivität

Der komplexe Gesamtwiderstand, sein Betrag und seine Phase ergeben sich nach Abb. 1 zu:

$$\underline{Z} = R_r + j \omega L = |\underline{Z}| e^{j\varphi} \text{ (komplexer Widerstand)} \quad , \quad (5)$$

mit

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R_r^2 + (\omega L)^2} \quad \text{(Betrag)} \quad (6)$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R_r} \quad \text{(Phase)} \quad . \quad (7)$$

Das dazugehörige Zeigerdiagramm ist in Abb. 2 zu sehen.

Der Darstellung komplexer Zahlen entsprechend, wird  $R$  auf der reellen und  $\omega L$  auf der positiven imaginären Achse aufgetragen. Die vektorielle Addition ergibt den komplexen Widerstand.

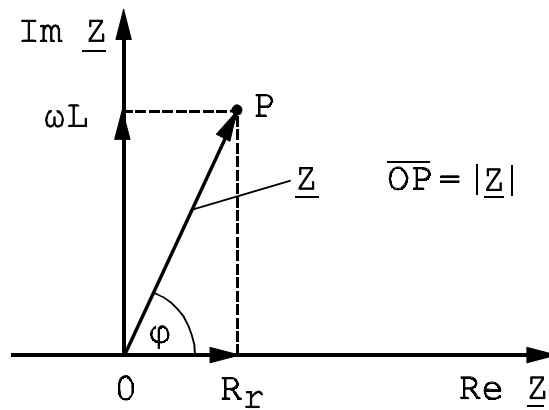


Abb. 2: Zeigerdiagramm für den komplexen Widerstand der realen Induktivität

## 2.2 Die Kapazität

Der Wechselstromwiderstand einer idealen Kapazität folgt analog 2.1. aus ihrem Strom-Spannungsverhalten

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (8)$$

und mit dem Strom nach Gl. (2)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{C} \int I_0 e^{j\omega t} dt \\ \underline{U} &= \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} \end{aligned} \quad (9)$$

und

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = |\underline{Z}| e^{j\varphi_c} \quad (10)$$

Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beträgt hier  $-\frac{\pi}{2}$ , d. h. die Spannung eilt dem Strom um  $\frac{\pi}{2}$  nach.

Die Einheit der Kapazität ist Farad (F).

$$[C] = \frac{As}{V} = F \quad (\text{Farad})$$

Technische Kondensatoren lassen sich nur näherungsweise als ideale Kapazitäten beschreiben. Der endliche Widerstand des Dielektrikums und Umpolarisierungsverluste bei Wechselspannung können durch Hinzufügen eines Parallelwider-

standes zur idealen Kapazität berücksichtigt werden. Abb. 3 zeigt das Ersatzschaltbild.

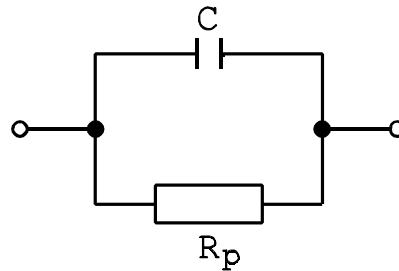


Abb. 3: Ersatzschaltbild eines Kondensators

Da sich bei der Parallelschaltung komplexer Widerstände die reziproken Einzelwiderstände zum reziproken Gesamtwiderstand addieren, ist es hier zweckmäßig den komplexen Leitwert  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  einzuführen.

Der komplexe Leitwert, sein Betrag und seine Phase ergeben sich nach Abb. 3 zu

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y} = \frac{1}{R_p} + j \omega C = |\underline{Y}| e^{j \varphi^*} \quad (11)$$

mit

$$|\underline{Y}| = \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C^2} \quad (\text{Betrag}) \quad (12)$$

$$\tan \varphi^* = \omega C R_p \quad (\text{Phase}) \quad (13)$$

Abb. 4 ist das dazugehörige Zeigerdiagramm für die Leitwerte.

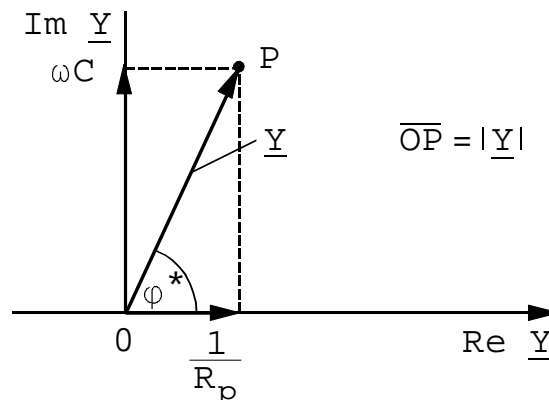


Abb. 4 : Zeigerdiagramm für den komplexen Leitwert einer realen Kapazität

### 3. Versuchsdurchführung

#### 3.1 Bestimmung von Induktivitäten und Kapazitäten durch Strom-Spannungsmessung

Die Gl. (6) und (12) werden nach den zu messenden Größen  $L$  und  $C$  aufgelöst und dabei jeweils  $|\underline{Z}|$  durch die Effektivwerte von Spannung und Strom, die Widerstände  $R_r$  und  $R_p$  durch die Gleichstromwerte ersetzt.

Für die Induktivität gilt :

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U_{eff}}{I_{eff}}\right)^2 - \left(\frac{U_{=}}{I_{=}}\right)^2} . \quad (14)$$

Für die Kapazität gilt :

$$C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{I_{eff}}{U_{eff}}\right)^2 - \left(\frac{I_{=}}{U_{=}}\right)^2} . \quad (15)$$

#### 3.2. Messung komplexer Widerstände mittels Brückenschaltung

##### 3.2.1 Die WHEATSTONE'sche Brücke mit 4 komplexen Widerständen

Die in Abb. 5 skizzierte Brücke ist gemäß den KIRCHHOFF'schen Sätzen abgeglichen, wenn Gl. (16) erfüllt ist.

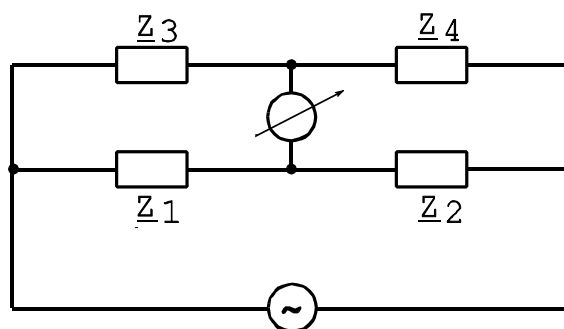


Abb. 5: Brückenschaltung

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \quad (16)$$

Gl. (16) gilt für Gleich- und Wechselstromwiderstände.

Aus der allgemeinen Darstellung für

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi}$$

und der Abgleichbedingung Gl. (16) folgen 2 getrennte Abgleichbedingungen für Betrag und Phase :

$$\frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|} = \frac{|\underline{Z}_3|}{|\underline{Z}_4|} \quad (17)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4 \quad (18)$$

Ersetzt man zunächst  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  durch OHM'sche Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  , geht der Betragsabgleich über in :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{|\underline{Z}_3|}{|\underline{Z}_4|} \quad (19)$$

und der Phasenabgleich in

$$\varphi_3 = \varphi_4 \quad (20)$$

da  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  ist. Die Phasenbedingung verlangt also im Falle des Abgleichs für  $\underline{Z}_3$  und  $\underline{Z}_4$  Widerstände gleicher Art und kann erfüllt werden durch :

- 2 Wirkwiderstände :  $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$

(OHM'sche Messbrücke),

- 2 komplexe Widerstände induktiven Charakters :

$$\varphi_3 = \varphi_4 > 0$$

- 2 komplexe Widerstände kapazitiven Charakters :

$$\varphi_3 = \varphi_4 < 0.$$

### 3.2.2 Messung von Induktivitäten

Von den beiden eingesetzten Induktivitäten für  $\underline{Z}_3$  und  $\underline{Z}_4$  ist eine die bekannte Normalinduktivität  $L_N$ . Die Abgleichbedingung Gl. (19) und Gl. (20) in Verbindung mit Gl. (6) und Gl. (7) für Betrag und Phase der Widerstände in den Brückenzweigen, ergibt

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{r_3}}{R_{r_4}} = \frac{L_3}{L_4} \quad . \quad (21)$$

Zur Erfüllung von Gl. (21) sind 2 Freiheitsgrade notwendig. Durch Variation von  $R_1$  und  $R_2$  mit Hilfe eines Potentiometers läßt sich die Bedingung

$$\frac{L_3}{L_4} = \frac{L_x}{L_N} = \frac{R_1}{R_2} \quad (22)$$

erfüllen und somit die unbekannte Induktivität  $L_x$  berechnen.

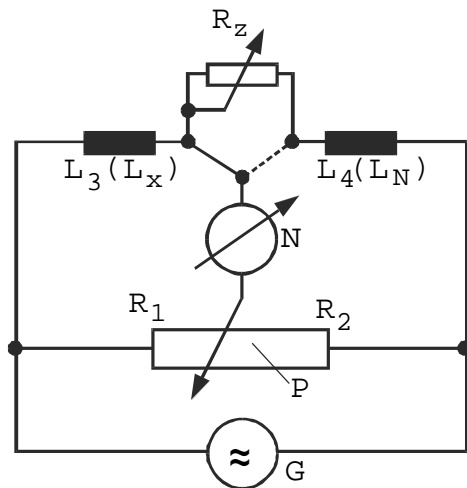
Gl. (22) setzt die Erfüllung der Bedingung

$$\frac{L_3}{L_4} = \frac{R_{r_3}}{R_{r_4}}$$

in Gl. (21) voraus. Dies ist im allgemeinen nicht gegeben, da  $R_{r_3}$  und  $R_{r_4}$  feste, konstruktiv bedingte Widerstände sind. Deshalb wird ein verstellbarer Widerstand  $R_z$  je nach Widerstandsverhältnis entweder der Spule  $L_x$  oder  $L_N$  in Reihe zugeschaltet der den vollständigen Abgleich der Brücke ermöglicht.

Aus den Betrachtungen zu Gl. (21) ergibt sich die in Abb. 6 skizzierte Messschaltung. Zum Abgleich der Brücke sind  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_z$  wechselseitig so zu verstellen, bis das Abgleichinstrument einen minimalen Wert anzeigt.  $R_1$  und  $R_2$  werden mit Hilfe eines Digitalmultimeters bestimmt.





- G - Wechselspannungsquelle
- P - 10-Gang-Potentiometer
- $R_Z$  - Dekadenwiderstand
- $L_N$  - Normalinduktivität
- $L_x$  - unbekannte Induktivität
- N - Abgleichinstrument

Abb. 6: Messschaltung zur Bestimmung von Induktivitäten mit der WHEATSTONE'schen Brückenschaltung

### 3.2.3 Messung von Kapazitäten

Zur Messung wird eine Schaltung entsprechend Abb. 6 benutzt, wobei  $L_x$  durch  $C_x$  und  $L_N$  durch  $C_N$  ersetzt werden. Die Abgleichbedingungen Gl. (19) und Gl. (20) in Verbindung mit Gl. (12) und Gl. (13) ergeben

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{P_3}}{R_{P_4}} = \frac{C_4}{C_3} \quad (23)$$

Die Erfüllung von Gl. (23) erfordert wieder 2 Freiheitsgrade. Durch Variation von  $R_1$  und  $R_2$  mit Hilfe eines Potentiometers läßt sich die Bedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_4}{C_3} = \frac{C_N}{C_x} \quad (24)$$

erfüllen und somit die unbekannte Kapazität berechnen.

Für den Brückenabgleich ist nach Gl. (23) außerdem die Erfüllung der Bedingung

$$\frac{R_{P_3}}{R_{P_4}} = \frac{C_4}{C_3}$$

erforderlich. Das ist aber im allgemeinen nicht gegeben, da  $R_{P_3}$  und  $R_{P_4}$  konstante, konstruktiv bedingte Widerstände darstellen. Deshalb ist ebenfalls ein zusätzlicher, verstellbarer Widerstand notwendig. Entsprechend Abb. 6 wird  $R_Z$  je nach Widerstandverhältnis entweder der Kapazität  $C_x$  oder  $C_N$  in Reihe zugeschaltet. Da der Reihenwiderstand  $R_Z$  in einen äquivalenten Parallelwiderstand umgerechnet werden kann, ist die Verbindung zum Ersatzschaltbild (Abb. 3) gegeben. Dies gilt für Kondensatoren mit schlechtem Isolationswiderstand. Für Kondensatoren hoher Qualität gilt  $R_p \rightarrow \infty$  und dann kann die Brücke nur mit  $R_1$  und  $R_2$  abgestimmt werden.

### 3.3 Messung mit elektronischen RLC-Messgeräten

Es gibt eine Vielzahl von industriell gefertigten elektronischen Messgeräten mit unterschiedlicher Genauigkeit und verschiedenen Frequenzbereichen. Auf Einzelheiten wird hier nicht eingegangen. Für ein Gerät im Praktikum liegt eine Anleitung bereit.

## 4. Kontrollfragen

- 4.1 Beschreiben Sie weitere Methoden zur L-C-Messung.
- 4.2 Leiten Sie Gl. (16) her.
- 4.3 Leiten Sie Gl. (21) und (23) her.
- 4.4 Welchen Einfluß hat die Frequenz bei den Messungen?