Hannes Konrad
Martin Wolf
Stephan Bialek

— Theoretische Physik III - Quantenmechanik — 21.12.2007

Übung 8

1 Präsenzaufgabe P8: Noch mehr lineare Algebra

A und B seien hermitesche Operatoren auf einem Hilbertraum und $|a\rangle$ sei ein Eigenzustand zu A mit Eigenwert a.

1.1 Teilaufgabe a)

Unter welcher Voraussetzung ist AB hermitesch?

Wenn AB hermitesch ist, muss folgedes gelten:

$$(AB)^\dagger = AB \tag{1}$$

$(AB)^\dagger$ lässt sich umformen:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA \tag{2}$$

Es muss also gelten: $AB \stackrel{!}{=} BA$. Der Kommutator $[A, B]$ muss also Null sein, damit AB hermitesch ist.

1.2 Teilaufgabe b)

Wie lautet der zum Kommutator $[A, B]$ adjungierte Operator?

$$\begin{aligned}
[A, B]^\dagger &= (AB - BA)^\dagger && (3)\\
&= (AB)^\dagger - (BA)^\dagger && (4)\\
&= BA - AB && (5)\\
&= -[A, B] && (6)
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$ so, dass $c\,[A, B]$ hermitesch ist.

Es liegt nahe $c = i$ zu setzen:

$$\begin{aligned}
(i\,[A, B])^\dagger &= -i(-[A, B]) && (7)\\
&= i\,[A, B] && (8)
\end{aligned}$$

1.3 Teilaufgabe c)

Berechnen Sie den Erwartungswert von $[A, B]$ im Zustand $|a\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle a| [A, B] |a\rangle &= \langle a| AB - BA |a\rangle && (9) \\ &= \langle a| AB |a\rangle - \langle a| BA |a\rangle && (10) \\ &= \langle a| aB |a\rangle - \langle a| Ba |a\rangle && (11) \\ &= a \langle a| B |a\rangle - a \langle a| B |a\rangle && (12) \\ &= 0 && (13) \end{aligned}$$

1.4 Teilaufgabe d)

Angenommen A ist invertierbar. Zeigen Sie, dass $|a\rangle$ ein Eigenzustand zu A^{-1} ist und bestimmen Sie den Eigenwert.

Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} A |a\rangle &= a |a\rangle && (14) \\ A^{-1}A &= 1 && (15) \end{aligned}$$

Anwenden von A^{-1} auf A liefert:

$$\begin{aligned} A^{-1}A |a\rangle &\overset{(14)}{=} aA^{-1} |a\rangle && (16) \\ &\overset{(15)}{=} 1 |a\rangle && (17) \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$A^{-1} |a\rangle = \frac{1}{a} |a\rangle \qquad (18)$$

Der Eigenwert zu A^{-1} ist also $\frac{1}{a}$.

1.5 Teilaufgabe e)

Ist der Projektionsoperator $|a\rangle \langle a|$ invertierbar?

Sei $A = |a\rangle \langle a|$ mit $A |n\rangle = a_n |n\rangle$ wobei $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ Basisvektoren des Hilbertraumes sind. Damit A invertierbar ist, dürfen die Eigenwerte nicht verschwinden. Dies gilt aber anscheinend nur, wenn der Hilbertraum 1-dimensional ist, denn für höhere Dimensionen könnte man schreiben:

$$|5\rangle \langle 5| 4\rangle = 0 \qquad (19)$$

Der Projektionsoperator $|a\rangle \langle a|$ ist also im Allgemeinen nicht invertierbar.

2 Präsenzaufgabe P9: Dreidimensionaler Hilbertraum

Seien $|\rho\rangle = (1,1,0)^T$ und $|\psi\rangle = (1,0,1)^T$ Vektoren im dreidimensionalen Hilbertraum $\mathbb{C}^3$, für den eine Orthonormalbasis gegeben ist durch $|e_1\rangle = (1,0,0)^T$, $|e_2\rangle = (0,1,0)^T$ und $|e_3\rangle = (0,0,1)^T$.

Die beiden Vektoren $|\rho\rangle$ und $|\psi\rangle$ lassen sich wie folgt durch die Basisvektoren darstellen:

$$|\rho\rangle = |e_1\rangle + |e_2\rangle \tag{20}$$

$$|\psi\rangle = |e_1\rangle + |e_3\rangle \tag{21}$$

2.1 Teilaufgabe a)

Finden Sie die Matrixelemente von $A \equiv |\rho\rangle\langle\psi|$ in dieser Basis.

$$\begin{aligned} A = |\rho\rangle\langle\psi| &= |\rho \otimes \psi| && (22)\\ &= (|e_1\rangle + |e_2\rangle)(\langle e_1| + \langle e_3|) && (23)\\ &= \left\{(1,0,0)^T + (0,1,0)^T\right\} \cdot \{(1,0,0) + (0,0,1)\} && (24)\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (25) \end{aligned}$$

2.2 Teilaufgabe b)

Berechnen Sie $A^\dagger$. Ist A hermitesch?

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \overline{A}^T && (26)\\ &\overset{A\text{ reell}}{=} A^T && (27)\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} && (28)\\ &\neq A && (29) \end{aligned}$$

A ist also nicht hermitesch!

2.3 Teilaufgabe c)

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda 1) \quad (30) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \quad (31) \\ &= (1-\lambda)\lambda^2 \quad (32) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also:

$$\lambda_1 = 1 \quad (33)$$

$$\lambda_2 = 0 \quad (34)$$